Ueber die Bewegung

eines materiellen, der Schwerkraft unterworfenen Punktes auf einer mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine verticale Axe rotirenden Geraden.

(Ein Beitrag zur Dynamik des Punktes.)

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Dr. phil. **Anton Hochstein**

in Dortmund.

Rostock.

Carl Boldt's Buchdruckerei.

1875.

Problem:

Ein der Schwerkraft unterworfener materieller Punkt ist gezwungen, auf einer unbiegsamen geraden Linie zu bleiben, welche zu einer senkrechten Geraden eine unveränderliche Neigung hat und mit derselben fest verbunden ist, und welche um diese senkrechte Gerade als Axe mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit rotirt. Es soll die Bewegung des materiellen Punktes beschrieben werden.

I. Kapitel.

Ableitung und allgemeine Integration der Differenzialgleichung der Bewegung des Punktes.

§. 1.

Allgemeine Betrachtung über das Problem.

Der materielle Punkt habe die Masse m. Es sind zwei Kräfte, welche auf denselben einwirken, die Schwerkraft und die durch die Rotation entstehende sogenannte Centrifugalkraft. Da aber der Punkt gezwungen ist, auf der festen Geraden zu bleiben, so können von beiden Kräften nur die in diese Gerade fallenden Componenten zur Geltung kommen; die beiden Normalcomponenten werden durch den Druck der unbiegsamen Geraden aufgehoben.

Um nun die Bewegung des Punktes zu verfolgen, wenden wir gewöhnliche räumliche Polarcoordinaten r, ϑ, φ an. Den Drehpunkt der festen Geraden nehmen wir als Pol an, als

Axe die senkrechte Rotationsaxe, um welche sich die unbiegsame Gerade dreht, als positive Richtung die vom Drehpunkte nach unten gerichtete Hälfte der Axe; r sei die Entfernung des materiellen Punktes auf der festen Geraden vom Drehpunkte. ϑ ist der Winkel, den der Radiusvector, also hier die rotirende feste Gerade mit der positiven Richtung der Axe bildet; nach der Voraussetzung ist $\vartheta =$ constans, der Punkt bewegt sich also auf einem geraden Kreiskegel; φ ist der Winkel, welchen die durch den Radiusvector und die Axe gelegte Meridianebene mit der Ebene des ersten Meridians bildet. Nur r und φ sind variabel und Functionen der Zeit, t; und zwar ist $\varphi = \omega t$, wo ω die constante Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Es ist also nur noch r als Function von t zu bestimmen d. h. es bleibt nur noch die Bewegung des materiellen Punktes auf der festen Geraden zu verfolgen.

§. 2.

Differenzialgleichung der Bewegung auf der festen Geraden.

Wenn wir die Acceleration der Schwere mit g bezeichnen, dann ist die constante Kraft, mit welcher die Schwere den Punkt nach unten, also in der positiven Richtung der Rotationsaxe zu bewegen sucht, $=$ mg. Die auf die Richtung der Geraden in der Meridianebene senkrechte Componente wird durch den Druck die Geraden aufgehoben, es ist also blos die tangentiale d. h. die in der Richtung des Radiusvector fallende Componente wirksam. Diese ist $mg \cos \vartheta$. Um ϑ eindeutig zu definiren, wollen wir unter ϑ den kleinsten der beiden Winkel verstehen, welche der Radiusvector mit der Axe bilden kann, also $0 < \vartheta \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$. Es ist demnach $mg \cos \vartheta$ unter allen Umständen eine positive Größe.

Die jedesmalige Entfernung des Punktes von der Drehaxe sei $\varrho = r \sin \vartheta$; dann ist die an dem Punkte wirkende Centrifugalkraft bekanntlich $= \frac{m w^2}{\varrho}$, wo w die augenblickliche Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher sich der Punkt auf dem Kreise mit dem Radius ϱ zu bewegen sucht. Diese Geschwindig-

keit w ist aber $= \omega \varrho$. Also erhalten wir für die Größe der Centrifugalkraft $m \omega^2 \varrho$. Ihre Richtung ist normal zur Drehaxe. Ihre in die Richtung des Radiusvector d. h. der festen Geraden fallende Componente ist $m \omega^2 \varrho \sin \vartheta = m \omega^2 r \sin^2 \vartheta$.

Dieser Ausdruck $m \omega^2 \sin^2 \vartheta r$ ist positiv oder negativ, je nachdem r positiv oder negativ ist. Da wir nämlich ϑ als absolute Constante betrachten, so müssen wir von den beiden halb unendlichen Aesten, in welchen die feste Gerade durch den Drehpunkt getheilt wird, den einen als positiv, den andern als negativ bezeichnen, und zwar müssen wir den als positiv nehmen, der mit der positiven Axenrichtung den spitzen Winkel ϑ bildet, also den nach unten gerichteten Ast.

Die gesammte, den Punkt auf der festen Geraden bewegende Kraft, ist nun bekanntlich $m \cdot \frac{d^2 r}{dt^2}$.

Da sich dieselbe aus den beiden Tangentialcomponenten der Schwere und der Centrifugalkraft zusammensetzt, so erhalten wir folgende Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \omega^2 \sin^2 \vartheta r + g \cos \vartheta.$$

§. 3.

Integration der Differenzialgleichung.

Am schnellsten gelangen wir zur Integration dieser Differenzialgleichung, wenn es gelingt, dieselbe so umzuformen, daß eine Integration durch Exponentialfunktionen zuläßig wird. Wenn nämlich U eine Funktion von t, und a^2 irgend eine positive Constante bedeutet, so ist bekanntlich für die Differenzialgleichung $\frac{d^2 U}{dt^2} = a^2 U$ das allgemeinste Integral

$$U = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at}.$$

Es hat aber die rechte Seite unserer obigen Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \omega^2 \sin^2 \vartheta \left(r + \frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} \right)$$

die gewünschte Form von $a^2 U$. Es fragt sich nur, ob

$$\frac{d^2\left(r + \frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}\right)}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$ ist. Das ist aber in der That der Fall, weil $$\frac{d^2\left(\frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}\right)}{dt^2} = 0$$ ist. Da in unserm Falle $a^2 = \omega^2 \sin^2 \vartheta$ ist, so erhalten wir als allgemeinstes Integral unserer Differenzialgleichung

$$r + \frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} = C_1 e^{t\omega \sin \vartheta} + C_2 e^{-t\omega \sin \vartheta}. \qquad (I.)$$

Die Constanten C_1 und C_2 bestimmen sich aus den Daten der Aufgabe für den Anfang der Bewegung. Es sei nämlich für $t = 0$, $r = r_0$. Dann ist

$$r_0 + \frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} = C_1 + C_2.$$

Wenn wir die Gleichung (I.) nach t differenziren, so ist

$$\frac{dr}{dt} = C_1 \omega \sin \vartheta \, e^{t\omega \sin \vartheta} - C_2 \omega \sin \vartheta \, e^{-t\omega \sin \vartheta}, \qquad (II.)$$

wo $\frac{dr}{dt} = v$ die Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher der materielle Punkt auf der festen Geraden sich bewegt.

Es sei nun die Anfangsgeschwindigkeit v_0, so ist für $t = 0$

$$\frac{v_0}{\omega \sin \vartheta} = C_1 - C_2.$$

Wir erhalten also für die Constanten C_1 und C_2 folgende Werthe:

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cos \vartheta + r_0 \omega^2 \sin^2 \vartheta + v_0 \omega \sin \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} \text{ und } \qquad (1.)$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g \cos \vartheta + r_0 \omega^2 \sin^2 \vartheta - v_0 \omega \sin \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}. \qquad (2.)$$

Wenn wir nun berücksichtigen, daß nach §. 1 $\omega t = \varphi - \varphi_0$ ist, so geht die Gleichung (I.) über in

$$r = -\frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} + C_1 e^{(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta} + C_2 e^{-(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta} \qquad (A.)$$

wo C_1 und C_2 die in (1.) und (2.) angegebene Bedeutung haben.

Es ist das die Gleichung der räumlichen Bahncurve, welche der materielle Punkt beschreibt.

Weil es sich für die weitere Discussion empfiehlt, für die Geschwindigkeit v noch einen andern Ausdruck zu gewinnen, als den in Gleichung (II.) gegebenen, so wollen wir unsere Differenzialgleichung noch nach einer zweiten, etwas weitläufigern Methode integriren.

Multipliciren wir die ganze Gleichung mit $2 \frac{dr}{dt} dt$, so ist

$$2 \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} dt = \omega^2 \sin^2 \vartheta \, 2 r \, dr + 2 g \cos \vartheta \, dr.$$

Also

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2 = \omega^2 \sin^2 \vartheta \left(r^2 - r_0^2\right) + 2 g \cos \vartheta \left(r - r_0\right),$$

wo wieder r_0 die Anfangslage, $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = v_0$ die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet.

Setzen wir

$$v_0^2 - \omega^2 \sin^2 \vartheta \, r_0^2 - 2 g \cos \vartheta \, r_0 = \mathfrak{C}, \qquad (3.)$$

so ist

$$v = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\omega^2 \sin^2 \vartheta \, r^2 + 2 g \cos \vartheta \, r + \mathfrak{C}}. \qquad (III.)$$

Es fragt sich, welches Vorzeichen ist der Wurzel zu geben? Offenbar ist $\frac{dr}{dt}$ positiv, wenn r mit wachsendem t wächst, wenn also der Punkt sich nach der Richtung der positiven r bewegt, und negativ, wenn sich der Punkt in umgekehrter Richtung bewegt, also r mit wachsendem t abnimmt. Der Uebergang vom negativen zum positiven Zeichen findet statt, wenn $\frac{dr}{dt} = 0$ wird. Es behält also $\frac{dr}{dt}$ das Vorzeichen von v_0, bis r einen solchen Werth erlangt, für welchen $\frac{dr}{dt}$ verschwindet. Wenn über diesen Werth hinaus die Bewegung fortdauert, wenn also die Bewegungsrichtung sich umkehrt, so ist von da ab das entgegengesetzte Zeichen zu nehmen. Gelangt r nie zu einem solchen Werthe, so behält $\frac{dr}{dt}$ das Zeichen von v_0

unveränderlich bei. Es wird aber $\frac{dr}{dt} = 0$, wenn $\omega^2 \sin^2 \vartheta\, r^2 + 2 g \cos \vartheta\, r = \omega^2 \sin^2 \vartheta\, r_0{}^2 + 2 g \cos \vartheta\, r_0 - v_0{}^2$ wird, d. h. für

$$r = -\frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} \pm \frac{\sqrt{(r_0\, \omega^2 \sin^2 \vartheta + g \cos \vartheta)^2 - v_0{}^2 \omega^2 \sin^2 \vartheta}}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}.$$

Diese Gleichung liefert für r aber nur dann einen reellen Werth, wenn $\left(r_0 + \frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}\right)^2 \geqq \frac{v_0{}^2}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}$ ist.

Suchen wir jetzt das zweite Integral unserer Differenzialgleichung. Aus Gleichung (III.) folgt:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\omega^2 \sin^2 \vartheta\, r^2 + 2 g \cos \vartheta\, r + \mathfrak{C}}}$$

$$= \frac{1}{\omega \sin \vartheta} \frac{dr}{\sqrt{\frac{\mathfrak{C}}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2 g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} r + r^2}}.$$

Setzen wir

$$\frac{\mathfrak{C}}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} = \frac{v_0{}^2}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{2 g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} r_0 - r_0{}^2 = \mathfrak{K},$$ so ist

$$\int_0^t dt = \frac{1}{\omega \sin \vartheta} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\mathfrak{K} + \frac{2 g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} r + r^2}}. \qquad \text{(IV.)}$$

Das Integral rechts ist aber von der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + b\, x + x^2}} = \log\left(\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + b\, x + x^2}\right) + \text{const.}$$

Es geht also die Gleichung (IV.) über in

$$t = \frac{1}{\omega \sin \vartheta} \cdot \log \frac{\frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} + r + \sqrt{\mathfrak{K} + \frac{2 g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} r + r^2}}{\frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} + r_0 + \frac{v_0}{\omega \sin \vartheta}}. \qquad \text{(IV.)}$$

Da aber $\omega t = \varphi - \varphi_0$ ist, wo φ_0 den Anfangswerth von φ bezeichnet, so können wir dieser Gleichung (IV.) auch folgende Form geben:

$$\left(\varphi-\varphi_0\right)=\frac{1}{\sin\vartheta}\log\frac{g\cos\vartheta+\omega^2\sin^2\vartheta\, r+\omega\sin\vartheta\sqrt{\mathfrak{C}+2g\cos\vartheta\, r+\omega^2\sin^2\vartheta\, r^2}}{g\cos\vartheta+\omega^2\sin^2\vartheta\, r_0+\omega\sin\vartheta\, v_0.} \qquad \text{(B.)}$$

Es ist das eine zweite Form der Bahngleichung des Punktes. Wenn wir dieselbe so umformen, daß r als Funktion von φ (resp. von t) erscheint, so kommen wir auf unsere frühere Form der Bahngleichung A.

Aus Gleichung (IV.) folgt nämlich

$$e^{\omega t\sin\vartheta}\left(g\cos\vartheta+\omega^2\sin^2\vartheta\, r_0+\omega\sin\vartheta\, v_0\right)-g\cos\vartheta$$
$$-\omega^2\sin^2\vartheta\, r=\omega\sin\vartheta\sqrt{\mathfrak{C}+2g\cos\vartheta\, r+\omega^2\sin^2\vartheta\, r^2},$$

wo $\mathfrak{C}$ durch Gleichung (3.) definirt ist.

Wenn wir jetzt beiderseits quadriren, und dann gehörig reduciren, so erhalten wir r folgendermaßen als Funktion von t ausgedrückt:

$$r=-\frac{g\cos\vartheta}{\omega^2\sin^2\vartheta}+\frac{g\cos\vartheta+\omega^2\sin^2\vartheta\, r_0+\omega\sin\vartheta\, v_0}{2\,\omega^2\sin^2\vartheta}e^{\omega t\sin\vartheta}$$
$$+\frac{g^2\cos^2\vartheta+2g\cos\vartheta\,\omega^2\sin^2\vartheta\, r_0+\omega^4\sin^4\vartheta\, r_0^{\,2}-\omega^2\sin^2\vartheta\, v_0^{\,2}}{2\left(g\cos\vartheta+\omega^2\sin^2\vartheta\, r_0+\omega\sin\vartheta\, v_0\right)\omega^2\sin^2\vartheta}e^{-\omega t\sin\vartheta}.$$

Es ist aber $\frac{g^2\cos^2\vartheta+2g\cos\vartheta\,\omega^2\sin^2\vartheta\, r_0+\omega^4\sin^4\vartheta\, r_0^{\,2}-\omega^2\sin^2\vartheta\, v_0^{\,2}}{g\cos\vartheta+\omega^2\sin^2\vartheta\, r_0+\omega\sin\vartheta\, v_0}$
$=g\cos\vartheta+\omega^2\sin^2\vartheta\, r_0-\omega\sin\vartheta\, v_0$. Wir erhalten folglich

$$r=-\frac{g\cos\vartheta}{\omega^2\sin^2\vartheta}+\frac{g\cos\vartheta+\omega^2\sin^2\vartheta\, r_0+\omega\sin\vartheta\, v_0}{2\,\omega^2\sin^2\vartheta}e^{\omega t\sin\vartheta} \qquad \text{(A.)}$$
$$+\frac{g\cos\vartheta+\omega^2\sin^2\vartheta\, r_0-\omega\sin\vartheta\, v_0}{2\,\omega^2\sin^2\vartheta}e^{-\omega t\sin\vartheta}$$

Das ist aber genau wieder unsere frühere Gleichung (A.), wenn wir $\omega t=\varphi-\varphi_0$ setzen.

II. Kapitel.

Discussion der einzelnen in dem Problem enthaltenen Fälle.

§. 4.

Der Effect der Schwerkraft, sowie auch der Centrifugalkraft hängt wesentlich ab von der Größe des constanten Winkels ϑ, wo $0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}$.

Betrachten wir zunächst die beiden extremen Fälle $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Der erste Fall $\vartheta = 0$ bedarf keiner weiteren Erörterung: es ist dann $\cos \vartheta = 1$, $\sin \vartheta = 0$, die Centrifugalkraft verschwindet vollständig und der Effect der Schwerkraft wird durch den Druck der festen Geraden nicht mehr vermindert, ist also ein Maximum. Mit anderen Worten: wir haben einfach den freien Fall ohne Rücksicht auf den Widerstand des Mittels resp., wenn $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = v_0$ nicht $= 0$ ist, den aufwärts oder abwärts gerichteten senkrechten Wurf. Die Differenzialgleichung reducirt sich in diesem Falle auf $\frac{d^2r}{dt^2} = g$; das Integral ist $r = \frac{g}{2} t^2 + v_0\, t + r_0$.

Ist dagegen $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, also $\cos \vartheta = 0$ und $\sin \vartheta = 1$, so reducirt sich die Differenzialgleichung auf

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \omega^2 r.$$

Der Effect der Schwere wird für diesen Fall ein Minimum, nämlich $= 0$, d. h. er wird durch den Druck der festen Geraden vollständig aufgehoben. Dagegen ist der Effect der Centrifugalkraft in diesem Falle ein Maximum. Denn die Richtung der Centrifugalkraft fällt jetzt mit dem Radiusvector, d. h. mit der Richtung der festen Geraden zusammen, die Centrifugalkraft wird also durch den Druck der Geraden nicht

mehr vermindert. Die Integralgleichung (A.) vereinfacht sich, da $\cos\vartheta = 0$, $\sin\vartheta = 1$, folgendermaßen:

$$r = \frac{\omega r_0 + v_0}{2\omega} e^{\omega t} + \frac{\omega r_0 - v_0}{2\omega} e^{-\omega t}, \text{ oder, da}$$

$\omega t = \varphi - \varphi_0$ ist,

$$r = \frac{\omega r_0 + v_0}{2\omega} e^{\varphi - \varphi_0} + \frac{\omega r_0 - v_0}{2\omega} e^{-(\varphi - \varphi_0)}. \quad \text{(V.)}$$

Da bei der wirklichen Bewegung des Punktes nur positive Werthe von t in Betracht kommen, so müssen wir, wenn ω absolut genommen werden soll, auch $\varphi - \varphi_0$ nur positive Werthe beilegen, d. h. wir betrachten nur die Drehung in einer bestimmten Richtung. Wollten wir auch die Drehung in der entgegengesetzten Richtung berücksichtigen, so erhielten wir einfach die zu den gefundenen symmetrischen Curven. Wir vergeben also der Allgemeinheit der Betrachtung nichts, wenn wir in Folgendem für $\varphi - \varphi_0$ nur positive Werthe voraussetzen.

Gehen wir jetzt über zur Discussion der Gleichung (V.). Um die in ihr enthaltenen möglichen Einzelfälle zu finden, betrachten wir die Gleichung (III.), welche unter der Bedingung $\cos\vartheta = 0$, $\sin\vartheta = 1$ folgende Gestalt annimmt:

$$v = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\omega^2 r^2 - \left(\omega^2 r_0^2 - v_0^2\right)}.$$

Wir sehen sofort, daß 3 Fälle zu unterscheiden sind, 1. $\omega^2 r_0^2 - v_0^2 = 0$, 2. $\omega^2 r_0^2 - v_0^2 < 0$, und 3. $\omega^2 r_0^2 - v_0^2 > 0$. Nur in dem letzten Falle, wenn $\omega^2 r_0^2 - v_0^2 > 0$ ist, d. h. wenn $\omega r_0 + v_0$ und $\omega r_0 - v_0$ dasselbe Vorzeichen haben, kann $\frac{dr}{dt}$ das Zeichen wechseln, sonst behält es im ganzen Verlaufe der Bewegung unveränderlich das Vorzeichen von v_0.

§. 5.

Discussion der Gleichung (V.): $r = \frac{\omega r_0 + v_0}{2\omega} e^{\varphi - \varphi_0} + \frac{\omega r_0 - v_0}{2\omega} e^{-(\varphi - \varphi_0)}$ unter der Bedingung $\omega^2 r_0^2 - v_0^2 = 0$.

Dieser Bedingung wird genügt, wenn entweder $\omega r_0 + v_0 = 0$ oder $\omega r_0 - v_0 = 0$, also $r_0 = \frac{\pm v_0}{\omega}$.

Ist $\omega r_0 + v_0 = 0$, so geht die Gleichung (V.) über in

$$r = r_0 \; e^{-(\varphi - \varphi_0)}. \qquad \text{(VI.)}$$

Ist $\omega r_0 - v_0 = 0$, so reducirt sich (V.) auf

$$r = r_0 \; e^{\varphi - \varphi_0}. \qquad \text{(VII.)}$$

Beide Gleichungen stellen einfache logarithmische Spiralen dar, die durch den Punkt $r_0 \; \varphi_0$ gehen. Die durch Gleichung (VI.) dargestellte ebene Curve sucht sich dem Pole in unendlich vielen immer kleiner werdenden Windungen zu nähern, ohne ihn in endlicher Zeit zu erreichen. Setzen wir nämlich in (VI.) $r = 0$, so erhalten wir $\frac{1}{e^{\omega t}} = 0$. Das ist aber nur möglich für $t = \infty$.

Die Spirale, welche durch Gleichung (VII.) dargestellt wird, umwindet den Pol in immer größer werdenden Windungen. Ihre Rückwärtsverlängerung liegt symmetrisch zu der Spirale VI. Der Punkt durchläuft die eine oder andere Spirale, jenachdem ihm eine Anfangsgeschwindigkeit von dem absoluten Werthe $[\omega r_0]$ zum Pole hin oder vom Pole weg gegeben wird. Die geometrischen Eigenschaften der logarithmischen Spirale sind bekannt. Während die Winkel $(\varphi - \varphi_0)$ in arithmetischer Reihe wachsen, nehmen die Radiivectoren in der durch (VI.) dargestellten Spirale in geometrischer Reihe ab, in der durch Gleichung (VII.) dargestellten Spirale in geometrischer Reihe zu.

Für den Winkel μ, den der Radiusvector in jedem Punkte einer Curve mit der Tangente bildet, haben wir bei Polarcoordinaten ganz allgemein die Bedingungsgleichung:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r \, d\varphi}{dr} = \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)}.$$

Es ist aber für Gleichung (VI.)

$$\left(\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}\right) = \frac{e^{-(\varphi - \varphi_0)}}{-e^{-(\varphi - \varphi_0)}} = -1$$

und für Gleichung (VII.)

$$\left(\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}\right) = \frac{e^{\varphi - \varphi_0}}{e^{\varphi - \varphi_0}} = +1.$$

Es ist also μ constant $= \frac{3\pi}{4}$ resp. $= \frac{\pi}{4}$.

Anmerkung:

Der Bedingung $\omega^2 r_0^2 - v_0^2 = 0$ wird außer den beiden Fällen $\omega r_0 + v_0 = 0$ und $\omega r_0 - v_0 = 0$ auch noch genügt durch $r_0 = v_0 = 0$. Es bleibt dann constant $r = 0$ und $\frac{dr}{dt} = 0$. Der Punkt hat also dann von Anfang an den Zustand, der in dem Falle $\omega r_0 + v_0 = 0$ als Endzustand von ihm angestrebt wird. Mechanisch ausgedrückt heißt das: Wenn der materielle Punkt sich von Anfang an im Drehpunkt der festen Geraden befindet und ihm keine Anfangsgeschwindigkeit mitgetheilt wird, so bleibt er für den Fall $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ fortwährend in Ruhe.

§. 6.

$\omega^2 r_0^2 - v_0^2 < 0.$

In diesem Falle haben $\omega r_0 + v_0$ und $\omega r_0 - v_0$ entgegengesetztes Vorzeichen, und dem absoluten Werthe nach ist $v_0 > [\omega r_0]$.

Die Geschwindigkeit $v = \frac{dr}{dt}$ ist

$$= \sqrt{\omega^2 r^2 - (\omega^2 r_0^2 - v_0^2)} = \frac{\omega r_0 + v_0}{2}\left(e^{\omega t} - \frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0} e^{-\omega t}\right).$$

Beide Ausdrücke sind ungeeignet zu verschwinden und sind dem absoluten Werthe nach stets wachsend. Die Geschwindigkeit v behält also stets das Vorzeichen von v_0 für den Fall, daß $\omega^2 r_0^2 - v_0^2 < 0$ ist. Der materielle Punkt bewegt sich

also fortwährend nach der Richtung, in welche er anfänglich geworfen wurde, ohne seine Bewegungsrichtung zu ändern und entfernt sich schließlich in's Unendliche.

Der obigen Bedingung kann zunächst dadurch genügt werden, daß $r_0 = 0$ ist, während $v_0 \lesseqgtr 0$ ist. Die Bahngleichung reducirt sich dann auf $r = \frac{v_0}{2\omega}\left(e^{\varphi - \varphi_0} - e^{-(\varphi - \varphi_0)}\right)$. (VIII.)

Das ist eine Spirale, welche die Natur der logarithmischen hat. Ihre Windungen nähern sich schließlich denen der logarithmischen Spirale

$$r = \frac{v_0}{2\omega} e^{\varphi - \varphi_0},$$

bleiben aber stets etwas enger.

Die Spirale, welche durch die Gleichung (VIII.) dargestellt wird, geht durch den Pol; denn für $\varphi = \varphi_0$ ist $r = 0$. In dem Pole hat sie den Radiusvector zur Tangente. Es ist nämlich $\operatorname{tg}\mu = \frac{e^{\varphi - \varphi_0} - e^{-(\varphi - \varphi_0)}}{e^{\varphi - \varphi_0} + e^{-(\varphi - \varphi_0)}}$. Es ist folglich für $\varphi = \varphi_0$, $\operatorname{tg}\mu = 0$, $\mu_{(\varphi_0)} = 0$; und es nähert sich für $\varphi = \infty$, $\operatorname{tg}\mu = 1$, $\mu = \frac{\pi}{4}$.

Ist aber $r_0 \gtrless 0$ und $v_0 \gtrless 0$, dabei aber $\omega^2 r_0^2 - v_0^2 < 0$, so können wir die Gleichung der Bahncurve folgendermaßen schreiben: $r = \frac{\omega r_0 + v_0}{2\omega}\left\{e^{\varphi - \varphi_0} + \frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0} e^{-(\varphi - \varphi_0)}\right\}$.

Da $\frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0}$ in unserm Falle negativ ist, so kann der Klammerausdruck $e^{\varphi - \varphi_0} + \frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0} e^{-(\varphi - \varphi_0)}$ und damit auch r sehr wohl verschwinden, aber offenbar nur dann, wenn $\frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0}$ ein unechter Bruch ist, also wenn r_0 und v_0 entgegengesetzte

Vorzeichen haben, d. h. wenn die Anfangsgeschwindigkeit dem Pole zugekehrt und dem absoluten Werthe nach größer als $[\omega r_0]$ ist.

Der Werth von φ, für welchen $r = 0$ wird, sei φ_1 Dann ergiebt sich aus der Gleichung

$$e^{\varphi_1 - \varphi_0} + \frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0} e^{-(\varphi_1 - \varphi_0)} = 0$$

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{1}{2} \log \frac{v_0 - \omega r_0}{\omega r_0 + v_0}.$$

Bei diesem Werthe $\varphi = \varphi_1$ wechselt r sein Zeichen, der Punkt tritt also auf die andere Hälfte der rotirenden Geraden über und entfernt sich jetzt auf dieser vom Pole in's Unendliche.

Untersuchen wir nun noch die Natur der beschriebenen Curve. Für den Fall $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, also $\cos\vartheta = 0$, $\sin\vartheta = 1$ reducirt sich die Gleichung (B.) auf

$$\varphi - \varphi_0 = \log \frac{\omega r + \sqrt{\omega^2 r^2 - (\omega^2 r_0^2 - v_0^2)}}{\omega r_0 + v_0},$$

Setzen wir nun $\varphi = \varphi' + \varphi_1$, wo φ_1 den oben angegebenen Werth hat, dann ist $\varphi' = \varphi - \varphi_1 = \varphi - \varphi_0 - (\varphi_1 - \varphi_0)$. Also

$$\varphi' = \log \frac{\omega r + \sqrt{\omega^2 r^2 - (\omega^2 r_0^2 - v_0^2)}}{\omega r_0 + v_0} - \log \sqrt{\frac{v_0 - \omega r_0}{\omega r_0 + v_0}}$$

$$= \log \frac{\omega r + \sqrt{\omega^2 r^2 - (\omega^2 r_0^2 - v_0^2)}}{\sqrt{v_0^2 - \omega^2 r_0^2}}.$$

Setzen wir nun $v_0^2 - \omega^2 r_0^2 = k^2 \omega^2$, wo k eine Constante bedeutet, welche mit r_0 gleichartig ist, so ist

$$\varphi' = \log \frac{r + \sqrt{r^2 + k^2}}{k},$$

also $k e^{\varphi'} - r = \sqrt{r^2 + k^2}$. Wenn wir jetzt quadriren und gehörig reduciren, so ist

$$r = \frac{k}{2} \left(e^{\varphi'} - e^{-\varphi'}\right).$$

Vertauschen wir in diesem Ausdrucke φ' mit $-\varphi'$, so geht r in $-r$ über. Die beiden vom Ursprunge ausgehenden

Curvenzweige sind demnach symmetrisch; nachdem der materielle Punkt den Pol passirt hat, wächst r in demselben Verhältnisse, als es vorhin abnahm.

Ist v_0 dem Pole nicht zugekehrt, so geht auch die von dem materiellen Punkte durchlaufene Spirale nicht durch den Pol, wohl aber ihre Rückwärtsverlängerung.

In jedem Falle nähert sich aber die Spirale, welche durch die Gleichung

$$r = \frac{\omega r_0 + v_0}{2\,\omega}\left(e^{\varphi - \varphi_0} + \frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0} e^{-(\varphi - \varphi_0)}\right)$$

dargestellt wird, für wachsendes φ der logarithmischen Spirale $r = \frac{\omega r_0 + v_0}{2\,\omega} e^{\varphi - \varphi_0}$, ihre Windungen bleiben aber stets etwas enger, da $\frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0}$ negativ ist.

§. 7.

$$\omega^2 r_0^2 - v_0^2 > 0.$$

Dieser Bedingung wird genügt, wenn $r_0 \gtrless 0$ und ωr_0 dem absoluten Werthe nach größer als $|v_0|$ ist und wenn ferner $\omega r_0 + v_0$ und $\omega r_0 - v_0$ dasselbe Vorzeichen haben.

Der Curvengleichung können wir auch in diesem Falle folgende Form geben:

$$r = \frac{\omega r_0 + v_0}{2\,\omega}\left\{e^{\varphi - \varphi_0} + \frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0} e^{-(\varphi - \varphi_0)}\right\}.$$

Da nach unserer obigen Voraussetzung $\omega r_0 + v_0$ nicht Null ist, und der Klammerausdruck $e^{\varphi - \varphi_0} + \frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0} e^{(\varphi - \varphi_0)}$ wesentlich positiv ist, so kann r für keinen Werth von φ verschwinden (wie es in §. 6. möglich war), sondern r behält stets das Vorzeichen von r_0. Wohl aber kann

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\omega r_0 + v_0}{2}\left\{e^{\omega t} - \frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0} e^{-\omega t}\right\}$$

Null werden, aber auch nur, wenn $\frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0} > 1$ ist, d. h.

wenn auch $v_0 \gtrless 0$ ist und r_0 und v_0 entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Der Bedingung $\omega^2 r_0 - v_0{}^2 > 0$ wird nämlich auch genügt durch $v_0 = 0$, $r_0 \lessgtr 0$. Eine Null werden von $\frac{dr}{dt}$ und eine Umkehr der Bewegung ist dann aber, wie wir soeben sahen, nicht möglich, der Punkt entfernt sich auf dem Aste der Geraden, auf welchem er sich anfänglich befand, mit stets wachsender Geschwindigkeit in's Unendliche. Die Curve, welche derselbe beschreibt, ist symbolisirt durch folgende Gleichung:

$$r = \frac{r_0}{2}\left(e^{\varphi - \varphi_0} + e^{-(\varphi - \varphi_0)}\right).$$

Dieselbe ist offenbar eine Spirale und setzt sich zusammen aus den logarithmischen Spiralen $r = \frac{r_0}{2}\, e^{\varphi - \varphi_0}$ und $r = \frac{r_0}{2}\, e^{-(\varphi - \varphi_0)}$, das soll heißen: sie läßt sich construiren, wenn wir unsere beiden logarithmischen Spiralen (VI.) $r = r_0\, e^{-(\varphi - \varphi_0)}$ und (VII.) $r = r_0\, e^{\varphi - \varphi_0}$ construiren, und dann aus den beiden zu jedem φ gehörenden Radiivectoren das arithmetische Mittel nehmen. Für sehr großes φ nähert sich $e^{-(\varphi - \varphi_0)}$ immer mehr der Null. Es ist also für sehr großes φ unser r nahezu $= \frac{r_0}{2}\, e^{\varphi - \varphi_0}$ d. h. die Windungen unserer Spirale nähern sich zuletzt immer mehr denen der logarithmischen Spirale $r = \frac{r_0}{2}\, e^{\varphi - \varphi_0}$, bleiben aber fortwährend etwas weiter. Für den Winkel μ, den der Radiusvector in jedem Punkte der Curve mit der Tangente bildet, haben wir die Gleichung

$$\operatorname{tg} \mu = \left(\frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}\right) = \frac{e^{\varphi - \varphi_0} + e^{-(\varphi - \varphi_0)}}{e^{\varphi - \varphi_0} - e^{-(\varphi - \varphi_0)}}.$$

Also für $\varphi = \varphi_0$ ist $\operatorname{tg} \mu = \frac{2}{0} = \infty$, $\mu = \frac{\pi}{2}$; für $\varphi = \infty$

erhalten wir $\operatorname{tg} \mu = 1$, $\mu = \frac{\pi}{4}$. Es steht also im Punkte $r_0 \varphi_0$ der Radiusvector auf der Tangente senkrecht, die Curve hat also dort die Natur eines Kreises; von diesem Punkte an nimmt μ stetig ab und nähert sich zuletzt dem Werthe $\frac{\pi}{4}$, den es bei der logarithmischen Spirale constant hat, bleibt aber immer etwas größer.

Ist auch v_0 gerade so wie r_0 von Null verschieden, so wird, wie oben angegeben, $v = \frac{dr}{dt}$ einmal verschwinden und von da ab sein Zeichen ändern, wenn r_0 und v_0 entgegengesetzte Vorzeichen haben; vorausgesetzt wird natürlich immer, daß $|\omega r_0| > |v_0|$ ist, wo die eingeklammerten Ausdrücke die absoluten Werthe bedeuten. Und zwar wird $\frac{dr}{dt} = 0$, wenn $e^{\omega t} - \frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0} e^{-\omega t} = 0$ wird. Das geschieht aber nach Ablauf der Zeit $t_1 = \frac{1}{2\omega} \log \frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0}$, bei dem Winkel

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{1}{2} \log \frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0}.$$

Bei diesem Punkte $r_1 \varphi_1$, wo $\frac{dr}{dt} = 0$ wird, tritt eine Umkehr der Bewegung ein; der materielle Punkt wandert auf der festen Geraden den Weg mit wachsender Geschwindigkeit zurück, den er gemacht hat, und entfernt sich dann in dieser selben Richtung mit immer steigender Geschwindigkeit in's Unendliche.

Was die geometrischen Eigenschaften der Curve angeht, welche der materielle Punkt bei seiner Bewegung beschreibt, so ist der Minimumspunkt $r_1 \varphi_1$, für welchen $\frac{dr}{dt}$ verschwindet, ein Scheitel der Curve.

Setzen wir nämlich wieder $\varphi = \varphi' + \varphi_1$, also $\varphi' = \varphi - \varphi_1 = \varphi - \varphi_0 - (\varphi_1 - \varphi_0)$, so ist, da

$$\varphi - \varphi_0 = \log \frac{\omega r + \sqrt{\omega^2 r^2 - (\omega^2 r_0^2 - v_0^2)}}{\omega r_0 + v_0}, \text{ und}$$

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \log \sqrt{\frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0}} \text{ ist,}$$

$$\varphi' = \log \frac{\omega r + \sqrt{\omega^2 r^2 - (\omega^2 r_0^2 - v_0^2)}}{\omega r_0 + v_0} - \log \sqrt{\frac{\omega r_0 - v_0}{\omega r_0 + v_0}}$$

$$\varphi' = \log \frac{\omega r + \sqrt{\omega^2 r^2 - (\omega^2 r_0^2 - v_0^2)}}{\sqrt{\omega^2 r_0^2 - v_0^2}}.$$

Es sei nun $\omega^2 r_0^2 - v_0^2 = k^2 \omega^2$, dann erhalten wir $\varphi' = \log \frac{r + \sqrt{r^2 - k^2}}{k}$.

Offenbar verschwindet aber $\varphi' = \varphi - \varphi_1$ für $r = k$, es ist also $k = r_1$. Aus der Gleichung $\varphi' = \log \frac{r + \sqrt{r^2 - r_1^2}}{r_1}$ folgt aber folgende Form der Bahngleichung

$$r = \frac{r_1}{2}\left(e^{\varphi'} + e^{-\varphi'}\right) \qquad \text{(IX.)}$$

Aus dieser Form der Gleichung ergiebt sich aber, daß r sich nicht ändert, wenn ich φ' mit $-\varphi'$ vertausche. Von dem Scheitel $r_1 \varphi_1$ also erstreckt sich die Curve in zwei symmetrischen Aesten, welche unendlich oft den Pol umwinden, in's Unendliche. Aber, wie gesagt, nur dann, wenn v_0 dem Pole zugekehrt ist, durchläuft der materielle Punkt den Theil der Curve, welcher den Scheitel enthält; haben v_0 und r_0 dasselbe Vorzeichen, dann beschreibt der Punkt zwar dieselbe Curve, aber nur den Ast derselben, welcher den Scheitel nicht enthält; der Scheitel liegt dann in der Rückwärtsverlängerung; der materielle Punkt entfernt sich dann also gleich Anfangs vom Pole mit stets wachsender Geschwindigkeit.

Auch die durch Gleichung (IX.) symbolisirte Curve nähert sich schließlich einer logarithmischen Spirale; in dem Scheitel aber hat sie die Natur eines Kreises, weil für $\varphi' = 0$ $\operatorname{tg} \mu = \infty$, also $\mu = \frac{\pi}{2}$ wird.

Schließlich wollen wir noch für alle in §§. 5, 6 und 7 behandelten Fälle eine allgemeine Formel für den Werth von $\operatorname{tg}\mu$ in dem Anfangspunkte $r_0\,\varphi_0$ entwickeln. Der allgemeinen Gleichung (V.) können wir folgende Gestalt geben:

$$r = \frac{r_0}{2}\left(e^{\varphi-\varphi_0} + e^{-(\varphi-\varphi_0)}\right) + \frac{v_0}{2\omega}\left(e^{\varphi-\varphi_0} - e^{-(\varphi-\varphi_0)}\right).$$

Es ist also allgemein:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r_0\left(e^{\varphi-\varphi_0} + e^{-(\varphi-\varphi_0)}\right) + \frac{v_0}{\omega}\left(e^{\varphi-\varphi_0} - e^{-(\varphi-\varphi_0)}\right)}{r_0\left(e^{\varphi-\varphi_0} - e^{-(\varphi-\varphi_0)}\right) + \frac{v_0}{\omega}\left(e^{\varphi-\varphi_0} + e^{-(\varphi-\varphi_0)}\right)}$$

Also für $\varphi = \varphi_0$ ist $\operatorname{tg}\mu_{(\varphi_0)} = \frac{\omega r_0}{v_0}$; es ist also $\mu_{(\varphi_0)} = 0$ für $r_0 = 0$ und $\mu_{(\varphi_0)} = \frac{\pi}{2}$ für $v_0 = 0$. Für $\varphi = \infty$ nähert sich $\operatorname{tg}\mu$ stets dem Werthe 1, also μ dem Werthe $\frac{\pi}{4}$.

§. 8.

Betrachtung des allgemeinsten Falles, $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ mit Ausschluß der Grenzen.

Ist ϑ von $\frac{\pi}{2}$ verschieden, so bleibt die Bahn des materiellen Punktes nicht mehr eine ebene Curve, sondern die feste Gerade beschreibt unter der Voraussetzung $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ einen geraden Kreiskegel, die Bahncurve des materiellen Punktes, welche auf diesen Kegel gezogen ist, ist von doppelter Krümmung. Als Gleichung derselben fanden wir:

$$r = -\frac{g\cos\vartheta}{\omega^2\sin^2\vartheta} + \frac{g\cos\vartheta + \omega^2\sin^2\vartheta\, r_0 + v_0\omega\sin\vartheta}{2\omega^2\sin^2\vartheta}\, e^{(\varphi-\varphi_0)\sin\vartheta}$$
$$+ \frac{g\cos\vartheta + \omega^2\sin^2\vartheta\, r_0 - v_0\omega\sin\vartheta}{2\omega^2\sin^2\vartheta}\, e^{-(\varphi-\varphi_0)\sin\vartheta} \qquad \text{(A.)}$$

Um die Natur dieser Curve zu charakterisiren, werden wir in jedem einzelnen Falle ihre Projection auf die durch

die Spitze des Kegels gehende Horizontalebene (die Aequatorialebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}$) betrachten.

Durch die Projection des Doppelkegels wird diese Ebene doppelt bedeckt; die Bedeckung, welche von der Projection der oberen (negativen) Hälfte des Kegels herrührt, wollen wir als negativ bezeichnen, die, welche von der unteren (positiven) Hälfte herrührt, als positiv. Der Uebergang aus der positiven in die negative Belegung und umgekehrt findet durch den Nullpunkt, den Pol, statt. Der Radiusvector der Projectionscurve ist $\varrho = r \sin \vartheta$. Wir nehmen denselben auf der oberen Seite der Aequatorialebene negativ, auf der unteren positiv. Als Gleichung der Projectionscurve erhalten wir also in diesem allgemeinsten Falle unter Berücksichtigung der Gleichung

$$\varrho = r \sin \vartheta:$$

$$\varrho = -\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta + \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta + \varrho_0 + \frac{v_0}{\omega}\right) e^{(\varphi - \varphi) \sin \vartheta}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta + \varrho_0 - \frac{v_0}{\omega}\right) e^{-(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta}.$$

Um die in dem allgemeinsten Falle enthaltenen Specialfälle zu entdecken, kehren wir zurück zu der Betrachtung, welche wir in §. 3 über die Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ angestellt haben. Wir sahen $\frac{dr}{dt}$ kann nur dann sein Vorzeichen wechseln, wenn $\frac{dr}{dt}$ im Verlauf der Bewegung Null wird; sonst behält es das Vorzeichen von v_0 unveränderlich bei. Es wird aber $\frac{dr}{dt} = 0$, wie wir fanden, wenn r folgender Gleichung genügt: $\omega^2 \sin^2 \vartheta \, r^2 + 2 g \cos \vartheta \, r = \omega^2 \sin^2 \vartheta \, r_0^2 + 2 g \cos \vartheta \, r_0 - v_0^2$. Diese Gleichung liefert für r nur dann reelle Werthe, wenn $\left(r_0 + \frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}\right)^2 \geqq \frac{v_0^2}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}$.

Wir sehen also, daß die Bewegung des materiellen Punktes wesentlich abhängt von dem Ausdrucke:

$$(g \cos \vartheta + \omega^2 \sin^2 \vartheta \, r_0)^2 - (v_0 \, \omega \sin \vartheta)^2.$$

Betrachten wir zunächst den Fall, daß dieser Ausdruck gleich Null ist.

§. 9.

$$(g \cos \vartheta + \omega^2 \sin^2 \vartheta\, r_0)^2 - (v_0\, \omega \sin \vartheta)^2 = 0.$$

Dieser Bedingung kann nur dadurch genügt werden, daß

1. simultan $r_0 + \frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} = 0$ und $v_0 = 0$ oder
2. $g \cos \vartheta + r_0\, \omega^2 \sin^2 \vartheta + v_0\, \omega \sin \vartheta = 0$ oder
3. $g \cos \vartheta + r_0\, \omega^2 \sin^2 \vartheta - v_0\, \omega \sin \vartheta = 0$ ist.

Ist $v_0 = 0$ und zugleich $r_0 = -\frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}$, so reducirt sich die Bahncurve auf

$$r = -\frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} = \text{const.} \tag{X.}$$

und für die Projectionscurve ist constant $\varrho = -\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta$ (Xa.)

d. h. die Projectionscurve ist ein Kreis. Der materielle Punkt selbst bleibt auf der rotirenden Geraden in Ruhe, da r constant bleibt. Wir haben also folgendes Resultat: bringt man den materiellen Punkt auf der oberen (negativen) Hälfte der rotirenden Geraden in eine Entfernung $r = \frac{g}{\omega^2} \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}$ vom Pol und giebt ihm keine Anfangsgeschwindigkeit, so bleibt der Punkt bei der Rotation fortwährend in dieser Lage und beschreibt einen Kreis mit dem Radius $\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta$ um die Rotationsaxe; die Centrifugalkraft und die Schwere halten sich das Gleichgewicht.

Ist dagegen 2. $g \cos \vartheta + r_0\, \omega^2 \sin^2 \vartheta + v_0\, \omega \sin \vartheta = 0$ während $g \cos \vartheta + r_0\, \omega^2 \sin^2 \vartheta - v_0\, \omega \sin \vartheta \gtrless 0$ ist, so erhalten wir als Bahngleichung

$$r = -\frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{g \cos \vartheta + r_0\, \omega^2 \sin^2 \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}\, e^{-(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta}, \tag{XI.}$$

und die Geschwindigkeit ist

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{g \cos\vartheta + r_0 \omega^2 \sin^2\vartheta}{\omega \sin\vartheta} e^{-\omega t \sin\vartheta}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt, daß sich der materielle Punkt fortwährend der Gleichgewichtslage, welche durch die Gleichung (X.) $r = - \frac{g \cos\vartheta}{\omega^2 \sin^2\vartheta}$ und $v = 0$ charakterisirt ist, nähert, ohne dieselbe in endlicher Zeit zu erreichen. Ist $g \cos\vartheta + r_0 \omega^2 \sin^2\vartheta > 0$, also $r_0 > - \frac{g \cos\vartheta}{\omega^2 \sin^2\vartheta}$ und $v_0 = \frac{g \cos\vartheta + r_0 \omega^2 \sin^2\vartheta}{\omega \sin\vartheta}$ negativ, so bewegt sich der Punkt fortwährend im Sinne der abnehmenden r, also von unten nach oben gegen die Gleichgewichtslage; umgekehrt, wenn $g \cos\vartheta + r_0 \omega^2 \sin^2\vartheta < 0$, also $r_0 < - \frac{g \cos\vartheta}{\omega^2 \sin^2\vartheta}$ und v_0 positiv ist, so bewegt sich der Punkt gegen die Gleichgewichtslage im Sinne der wachsenden r, d. h. von oben nach unten.

Ist endlich 3. $g \cos\vartheta + r_0 \omega^2 \sin^2\vartheta - v_0 \omega \sin\vartheta = 0$, also $v_0 \omega \sin\vartheta = g \cos\vartheta + r_0 \omega^2 \sin^2\vartheta \gtrless 0$, so ist

$$r = - \frac{g \cos\vartheta}{\omega^2 \sin^2\vartheta} + \frac{g \cos\vartheta + r_0 \omega^2 \sin^2\vartheta}{\omega^2 \sin^2\vartheta} e^{(\varphi - \varphi_0) \sin\vartheta}, \quad \text{(XII.)}$$

und $\frac{dr}{dt} = \frac{g \cos\vartheta + r_0 \omega^2 \sin^2\vartheta}{\omega \sin\vartheta} e^{\omega t \sin\vartheta}$ eine absolut genommen wachsende Funktion und von unveränderlichen Zeichen, wesentlich positiv, wenn $g \cos\vartheta + r_0 \omega^2 \sin^2\vartheta > 0$ und wesentlich negativ, wenn $g \cos\vartheta + r_0 \omega^2 \sin^2\vartheta < 0$ ist. Der materielle Punkt bewegt sich also, ohne je seine Bewegung umzukehren, mit stets wachsender Geschwindigkeit entweder auf der unteren oder oberen Hälfte der rotirenden Geraden in's Unendliche.

Projiciren wir jetzt die von dem Punkte unter der Voraussetzung, daß $(g \cos + r_0 \omega^2 \sin^2\vartheta)^2 - (v_0 \omega \sin\vartheta)^2 = 0$ ist, beschriebene Bahn auf die Aequatorialebene. Ist $v_0 = 0$ und $r_0 = - \frac{g \cos\vartheta}{\omega^2 \sin^2\vartheta}$, so erhalten wir, wie schon angegeben, einen

Kreis mit dem Radius $\varrho = \varrho_0$ auf der oberen (negativen) Seite der Aequatorialebene.

Ist $g \cos \vartheta + r_0 \omega^2 \sin^2 \vartheta + v_0 \omega \sin \vartheta = 0$, so ist

$$\varrho = -\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta + \left(\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta + \varrho_0\right) e^{-(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta}. \quad (\mathrm{XI^a.})$$

Ist dagegen $g \cos \vartheta + r_0 \omega^2 \sin^2 \vartheta - v_0 \omega \sin \vartheta = 0$, so ist

$$\varrho = -\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta + \left(\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta + \varrho_0\right) e^{(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta}. \quad (\mathrm{XII^a.})$$

Beide Spiralen stehen in der engsten Beziehung zu einander. Sie haben nicht nur den Anfangspunkt $\varrho_0 \varphi_0$ gemeinsam, sondern die Rückwärtsverlängerung der durch (XII^a.) dargestellten Spirale liegt symmetrisch zu der Spirale (XI^a.). Durch beide Gleichungen ist also im Grunde nur eine und dieselbe Curve symbolisirt.

Ist $\varrho_0 + \frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta < 0$, also $\varrho_0 < -\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta$, dann schließt sich die Spirale (XI^a.) von Außen asymptotisch an den Kreis $\varrho = -\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta$, ebenso thut dieses die Rückwärtsverlängerung von (XII^a.), während für den Theil dieser Curve, welchen die Projection des materiellen Punktes wirklich durchläuft, ϱ auf der negativen Seite der Aequatorialebene in's Unendliche wächst.

Ist $\varrho_0 + \frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta > 0$, also $\varrho_0 > -\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta$, so schließt sich die Curve (XI^a.) von Innen asymptotisch an den Kreis (X^a.) an. Dagegen bei der Curve (XII^a.) wächst ϱ in diesem Falle fortwährend und zwar, wenn $0 > \varrho_0 > -\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta$ ist, zunächst von ϱ_0 bis Null, setzt dann im Nullpunkte (dem Pol) durch das Blatt und wächst auf der positiven Seite von 0 bis $+\infty$; nach Rückwärts nimmt ϱ von ϱ_0 bis $-\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta$ ab, erreicht diesen Werth aber erst für $t = \infty$, die Rückwärtsverlängerung schließt sich also asymptotisch an die Kreislinie (X^a.) an.

Die Curve (XII^a.) nähert sich für sehr großes $\varphi - \varphi_0$ der Spirale

$$\varrho = \left(\frac{g}{\omega^2} \operatorname{cotg} \vartheta + \varrho_0\right) e^{(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta},$$

welche die Natur der logarithmischen Spiralen hat, da der Winkel μ, den der Radiusvector mit der Tangente bildet, im ganzen Verlauf der Curve constant ist. Für $\operatorname{tg} \mu = \left(\frac{\varrho}{\frac{d\varrho}{d\varphi}}\right)$ erhalten wir den constanten Werth $\frac{1}{\sin \vartheta}$, also $\frac{\pi}{2} > \mu > \frac{\pi}{4}$.

§. 10.

$$(g \cos \vartheta + r_0\, \omega^2 \sin^2 \vartheta)^2 - (v_0\, \omega \sin \vartheta)^2 > 0.$$

In dieser Bedingung liegt, daß

1. $g \cos \vartheta + r_0\, \omega^2 \sin^2 \vartheta \gtrless 0$ ist, d. h. daß r_0 nicht den singulären Werth $-\frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}$ habe, daß
2. $g \cos \vartheta + r_0\, \omega^2 \sin^2 \vartheta + v_0\, \omega \sin \vartheta$ und $g \cos \vartheta + r_0\, \omega^2 \sin^2 \vartheta - v_0\, \omega \sin \vartheta$ dasselbe Vorzeichen haben, und daß endlich
3. $[g \cos \vartheta + r_0\, \omega^2 \sin^2 \vartheta] > [v_0\, \omega \sin \vartheta]$ ist, wo die Ausdrücke in [ ] die absoluten Werthe bedeuten.

Diesen Bedingungen wird zunächst dadurch genügt, daß $v_0 = 0$, während $r_0 \gtrless -\frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}$ ist.

Die Bahngleichung (A.) reducirt sich dann folgendermaßen:

$$r = -\frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{1}{2}\, \frac{g \cos \vartheta + r_0 \omega_2 \sin^2 \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} \left\{ e^{(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta} + e^{-(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta} \right\}. \quad \text{(XIII.)}$$

Daraus ergiebt sich

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\omega} \operatorname{cotg} \vartheta + r_0\, \omega \sin \vartheta\right) \left\{ e^{t\omega \sin \vartheta} - e^{-t\omega \sin \vartheta} \right\}.$$

Der Factor $e^{t\omega \sin \vartheta} - e^{-t\omega \sin \vartheta}$ ist wesentlich positiv; $\frac{dr}{dt}$ hat also unveränderlich das Vorzeichen von $\frac{g}{\omega} \operatorname{cotg} \vartheta + r_0\, \omega \sin \vartheta$, und wächst absolut genommen fortwährend. Ist also

$r_0 > -\frac{g}{\omega^2}\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$, so ist $\frac{dr}{dt}$ wesentlich positiv, der materielle Punkt bewegt sich auf der rotirenden Geraden abwärts mit stets wachsender Geschwindigkeit in's Unendliche. Eine Umkehr der Bewegung findet nicht statt. — Befindet sich dagegen der materielle Punkt zu Anfang der Bewegung auf der oberen, negativen Hälfte der rotirenden Geraden so hoch, daß $r_0 < -\frac{g\cos\vartheta}{\omega^2\sin^2\vartheta}$ ist, so ist $\frac{dr}{dt}$ wesentlich negativ, der Punkt bewegt sich also in der Richtung der negativen r mit stets zunehmender Geschwindigkeit in's Unendliche. Eine Umkehr der Bewegung findet auch dann nicht statt.

Projiciren wir die von dem Punkte durchlaufene Bahn auf die Aequatorialebene, so erhalten wir die Spirale

$$\varrho = -\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}\vartheta + \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}\vartheta + \varrho_0\right)\left\{e^{(\varphi-\varphi_0)\sin\vartheta} + e^{-(\varphi-\varphi_0)\sin\vartheta}\right\} \text{(}$$

welche ganz auf der negativen Seite der Projectionsebene liegt, wenn $\varrho_0\ \varphi_0$ außerhalb des Kreises (X^a.) liegt, also $\varrho_0 < -\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}\vartheta$ ist. Ist aber $0 > \varrho_0 > -\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}\vartheta$, so durchsetzt die Spirale das Blatt im Pol und verläuft dann weiter auf der positiven Seite; ist $\varrho_0 > 0$, so verläuft die Spirale ganz auf der positiven Seite der Aequatorialebene. In jedem Falle aber nähert sich die Spirale (XIII^a.) für wachsendes φ der Spirale $\varrho = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}\vartheta + \varrho_0\right)e^{(\varphi-\varphi_0)\sin\vartheta}$, welche die Natur der logarithmischen Spiralen hat.

Die Gleichung (XIII^a.) ändert sich nicht, wenn man $\varphi - \varphi_0$ in $-(\varphi-\varphi_0)$ verwandelt; der Punkt $\varrho_0\ \varphi_0$ ist also ein Scheitel der durch diese Gleichung symbolisirten Curve. Diese Curve hat also vom Punkte $\varrho_0\ \varphi_0$ aus zwei symmetrische Aeste, von denen der materielle Punkt oder vielmehr seine Projection aber nur den einen durchläuft.

Ist v_0 nicht selbst $= 0$, so kann, wie wir früher sahen, $\frac{dr}{dt}$ unter den Bedingungen dieses §. 10 momentan verschwinden;

die Geschwindigleit $\frac{dr}{dt}$ ändert von da an ihr Zeichen, es tritt also eine Umkehr der Bewegung ein. Aus der allgemeinen Gleichung (A.) erhalten wir durch Differenziren:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta + v_0\,\omega\sin\vartheta}{2\,\omega\sin\vartheta}\, e^{t\omega\sin\vartheta}$$

$$- \frac{g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta - v_0\,\omega\sin\vartheta}{2\,\omega\sin\vartheta}\, e^{-t\omega\sin\vartheta}.$$

Die Zeit t_1, nach welcher dieser Ausdruck von $\frac{dr}{dt} = 0$ wird, bestimmt sich aus der Gleichung

$$e^{2\,t_1\,\omega\sin\vartheta} = \frac{g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta - v_0\,\omega\sin\vartheta}{g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta + v_0\,\omega\sin\vartheta}.$$

Wenn

$$[g\cos\vartheta + r_0\omega^2\sin^2\vartheta + v_0\omega\sin\vartheta] > [g\cos\vartheta + r_0\omega^2\sin^2\vartheta - v_0\omega\sin\vartheta],$$

d. h. wenn v_0 und $\frac{g}{\omega}\operatorname{cotg}\vartheta + \omega\, r_0\sin\vartheta$ dasselbe Vorzeichen haben, liefert diese Gleichung keinen reellen positiven Werth für t_1; es verschwindet also $\frac{dr}{dt}$ nicht. Wenn aber v_0 und $\frac{g}{\omega}\operatorname{cotg}\vartheta + \omega\, r_0\sin\vartheta$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, dann verschwindet unter den Bedingungen dieses §.

$$\frac{dr}{dt} \text{ für } t_1 = \frac{1}{\omega\sin\vartheta}\log\sqrt{\frac{g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta - v_0\,\omega\sin\vartheta}{g\cos\vartheta + r_0\omega^2\sin^2\vartheta + v_0\,\omega\sin\vartheta}}.$$

Es wird dagegen in unserem §. $\frac{dr}{dt}$ stets $= \infty$ für $t = \infty$.

Haben also v_0 und $\frac{g}{\omega}\operatorname{cotg}\vartheta + \omega\, r_0\sin\vartheta$ dasselbe Vorzeichen, so bewegt sich der materielle Punkt mit absolut genommen stets wachsender Geschwindigkeit in der Richtung von v_0 auf der rotirenden Geraden in's Unendliche. Haben dagegen v_0 und $\frac{g}{\omega}\operatorname{cotg}\vartheta + \omega\, r_0\sin\vartheta$ verschiedene Vorzeichen, so bewegt sich der Punkt zuerst gegen die Gleichgewichtslage, ohne sie jedoch zu erreichen, kehrt dann seine Bewegung um bei dem Punkte

$$r_1 = -\frac{g\cos\vartheta}{\omega^2\sin^2\vartheta} \pm \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{\left(\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}\vartheta + r_0\sin\vartheta\right)^2 - \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2},$$

in welchem $\frac{dr}{dt} = 0$ wird, und entfernt sich dann in umgekehrter Richtung mit stets wachsender Geschwindigkeit in's Unendliche. In diesem Ausdrucke für r_1 gilt das obere (positive) Vorzeichen der Wurzel, wenn $r_0 > -\frac{g\cos\vartheta}{\omega^2\sin^2\vartheta}$ ist; es bleibt dann auch $r_1 > -\frac{g\cos\vartheta}{\omega^2\sin^2\vartheta}$. Das negative Zeichen ist der Wurzel beizulegen, wenn $r_0 < -\frac{g\cos\vartheta}{\omega^2\sin^2\vartheta}$ ist; es bleibt dann auch $r_1 < -\frac{g\cos\vartheta}{\omega^2\sin^2\vartheta}$.

Setzen wir jetzt $\varphi = \varphi_1 + \varphi'$, also $\varphi' = \varphi - \varphi_1 = (\varphi - \varphi_0) - (\varphi_1 - \varphi_0)$. Nach der allgemeinen Gleichung (B.) [vergl. §. 3] ist aber

$$(\varphi - \varphi_0)\sin\vartheta = \log\frac{g\cos\vartheta + r\omega^2\sin^2\vartheta + \omega\sin\vartheta\sqrt{\mathfrak{C} + 2g\cos\vartheta\, r + \omega^2\sin^2\vartheta\, r^2}}{g\cos\vartheta + r_0\omega^2\sin^2\vartheta + v_0\omega\sin\vartheta},$$

wo $\mathfrak{C} = v_0^2 - 2g\cos\vartheta\, r_0 - \omega^2\sin^2\vartheta\, r_0^2$. Aus unserer obigen Gleichung für t_1 folgt ferner

$$(\varphi_1 - \varphi_0)\sin\vartheta = \log\sqrt{\frac{g\cos\vartheta + r_0\omega^2\sin^2\vartheta - v_0\omega\sin\vartheta}{g\cos\vartheta + r_0\omega^2\sin^2\vartheta + v_0\omega\sin\vartheta}}.$$

Es ist also

$$\varphi'\sin\vartheta = \log\frac{g\cos\vartheta + r\omega^2\sin^2\vartheta + \omega\sin\vartheta\sqrt{\mathfrak{C} + 2g\cos\vartheta\, r + \omega^2\sin^2\vartheta\, r^2}}{\pm\sqrt{(g\cos\vartheta + r_0\omega^2\sin^2\vartheta)^2 - (v_0\omega\sin\vartheta)^2}},$$

wo das Doppelzeichen sich wieder gerade so vertheilt, wie oben bei r_1. Aus unserer obigen Gleichung für r_1 folgt aber

$$\pm\sqrt{(g\cos\vartheta + r_0\omega^2\sin^2\vartheta)^2 - (v_0\omega\sin\vartheta)^2} = r_1\omega^2\sin^2\vartheta + g\cos\vartheta.$$

Und aus dieser Gleichung folgt ferner durch Quadriren

$$v_0^2 - 2g\cos\vartheta\, r_0 - \omega^2\sin^2\vartheta\, r_0^2 = \mathfrak{C} = -(2g\cos\vartheta\, r_1 + \omega^2\sin^2\vartheta\, r_1^2).$$

Setzen wir das ein, so erhalten wir

$$\varphi'\sin\vartheta = \log\frac{g\cos\vartheta + r\omega^2\sin^2\vartheta + \omega\sin\vartheta\sqrt{2g\cos\vartheta(r - r_1) + \omega^2\sin\vartheta^2(r^2 - r_1^2)}}{g\cos\vartheta + r_1\omega^2\sin^2\vartheta}$$

oder

$$e^{\varphi'\sin\vartheta} = \frac{g\cos\vartheta + r\omega^2\sin^2\vartheta + \omega\sin\vartheta\sqrt{2g\cos\vartheta(r - r_1) + \omega^2\sin^2\vartheta(r^2 - r_1^2)}}{g\cos\vartheta + r_1\omega^2\sin^2\vartheta}.$$

Lösen wir diese Gleichung nach r auf, so erhalten wir

$$r = -\frac{g\cos\vartheta}{\omega^2\sin^2\vartheta} + \frac{g\cos\vartheta + r_1\,\omega^2\sin^2\vartheta}{2\,\omega^2\sin^2\vartheta}\left(e^{\varphi'\sin\vartheta} + e^{-\varphi'\sin\vartheta}\right) \quad \text{(XIV.)}$$

Aus dieser Form der Gleichung sieht man deutlich, daß r sich nicht ändert, wenn φ' in $-\varphi'$ verwandelt wird, daß also der materielle Punkt sich von der Gleichgewichtslage nach demselben Gesetze wieder entfernt, wie er sich zuerst derselben näherte, d. h., daß gleiche Zeit vor und nach dem Verschwinden von $\frac{dr}{dt}$ der Radiusvector r denselben Werth hat.

Projiciren wir jetzt die von dem materiellen Punkte beschriebene räumliche Bahncurve auf die Aequatorialebene, so erhalten wir als Polargleichung der Projection

$$\varrho = -\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}\vartheta + \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}\vartheta + \varrho_1\right)\left\{e^{\varphi'\sin\vartheta} + e^{-\varphi'\sin\vartheta}\right\}, \quad \text{(XIV}^{a}\text{.)}$$

wo $\varrho_1 = -\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}\vartheta \pm \sqrt{\left(\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}\vartheta + \varrho_0\right)^2 - \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$.

Die Zeichenbestimmung ist hier wie oben bei r_1.

Aus dieser Gleichung (XIV^a.) sieht man sofort, daß der Punkt $\varrho_1\,\varphi_1$, in welchem $\frac{d\varrho}{dt}$ verschwindet und in welchem $\varphi' = 0$ ist, ein Scheitel der Curve ist, von dem aus dieselbe zwei symmetrische Aeste hat. Wenn aber v_0 und $\frac{g}{\omega}\operatorname{cotg}\vartheta + \omega\varrho_0$ dasselbe Vorzeichen haben, so durchläuft die Projection des materiellen Punktes nur den Theil der Curve, welcher den Scheitel nicht enthält, dieser liegt vielmehr in der Rückwärtsverlängerung.

§. 11.

$$(g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta)^2 - (v_0\,\omega\sin\vartheta)^2 < 0.$$

Um dieser Bedingung zu genügen, müssen $g\cos\vartheta + r_0\omega^2\sin^2\vartheta + v_0\,\omega\sin\vartheta$ und $g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta - v_0\,\omega\sin\vartheta$

verschiedene Vorzeichen haben, es muß ferner $v_0 \gtrless 0$ und dem absoluten Werthe nach

$$\left[\frac{v_0}{\omega}\right] > \left[\frac{g}{\omega^2} \cot g\, \vartheta + r_0 \sin \vartheta\right] \text{ sein.}$$

Dagegen kann $g \cos \vartheta + r_0\, \omega^2 \sin^2 \vartheta$ auch $= 0$ sein; es darf also r_0 auch den Werth $-\frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta}$ haben, d. h. der materielle Punkt darf sich zu Anfang der Bewegung in der Gleichgewichtslage befinden.

Betrachten wir diesen letzten Fall zuerst. Die allgemeine Bahngleichung (A.) reducirt sich dann folgendermaßen:

$$r = -\frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{v_0}{2 \omega \sin \vartheta} \left\{ e^{(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta} - e^{-(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta} \right\}. \quad \text{(XV.)}$$

Es ist also:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{v_0}{2} \left\{ e^{t \omega \sin \vartheta} + e^{-t \omega \sin \vartheta} \right\}.$$

Aus dieser Gleichung sehen wir, was wir übrigens schon wissen, daß $\frac{dr}{dt}$ niemals verschwinden kann und absolut genommen eine stets wachsende Function ist. Wir sehen ferner, daß $\frac{dr}{dt}$ sich nicht ändert, wenn wir v_0 das entgegengesetzte Vorzeichen geben. Wenn also der materielle Punkt von der Gleichgewichtslage aus auf der rotirenden Geraden mit gleicher Kraft einmal aufwärts, ein anderes Mal abwärts geworfen wird, so erlangt er unter dem Einfluß der übrigen (constant auf ihn einwirkenden) Kräften in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten. Die Gleichung (XV.) zeigt, daß unter dieser Bedingung auch die in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege gleich, aber entgegengesetzt sind, denn es sei $r + \frac{g \cos \vartheta}{\omega^2 \sin^2 \vartheta} = r'$; so erhalten wir $r' = \frac{v_0}{2 \omega \sin \vartheta} \left\{ e^{(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta} - e^{-(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta} \right\}$.

Wenn wir diese Bahn in der mehrfach erwähnten Weise auf die Aequatorialebene projiciren und dabei $\varphi - \varphi_0 = \varphi'$ setzen, so ist

$$\varrho' = \frac{v_0}{2\omega}\left(e^{\varphi' \sin\vartheta} - e^{-\varphi' \sin\vartheta}\right). \qquad (XV^a.)$$

Aus dieser Gleichung sieht man sofort, daß der Punkt $\varrho_0\, \varphi_0$, in welchem $\varrho' = 0$ und $\varphi' = 0$ ist, ein Scheitel der durch dieselbe symbolisirten Curve ist. Dieselbe erstreckt sich von demselben mit zwei symmetrischen Aesten in's Unendliche. Die Projection des materiellen Punktes durchläuft aber nur den einen dieser Aeste und zwar vom Scheitel aus. Ist v_0 positiv, so gehen beide symmetrische Aeste durch den Pol und verlaufen dann auf der positiven Seite der Projectionsebene.

Auch in den übrigen, unter §. 11. gehörenden Fällen, wo der materielle Punkt sich Anfangs nicht in der Gleichgewichtslage befindet, kann nach unsern frühern Erörterungen eine Umkehr der Bewegung nicht stattfinden. Die Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = \omega \sin\vartheta \left(C_1\, e^{t\omega \sin\vartheta} - C_2\, e^{-t\omega\sin\vartheta}\right)$ ist, da C_1 und C_2 in diesem §. entgegengesetztes Vorzeichen haben, von unveränderlichem Zeichen, wesentlich positiv, wenn $C_1 > 0$ oder $v_0 > 0$ ist, wesentlich negativ, wenn $C_1 < 0$ oder $v_0 < 0$ ist. Wenn aber auch $\frac{dr}{dt}$ stets das Vorzeichen von v_0 beibehält, so läßt sich doch vermuthen, daß $\frac{dr}{dt} = v$ einen ausgezeichneten Werth erlangt, wenn der materielle Punkt die Gleichgewichtslage passirt. In der That wird $\frac{dv}{dt} = 0$ für $r = -\frac{g \cos\vartheta}{\omega^2 \sin^2\vartheta}$, während $\frac{d^2 v}{dt^2}$ dann das Vorzeichen von v_0 hat, es wird also in dem Augenblicke, wo der Punkt durch die Gleichgewichtslage geht, v ein Maximum, wenn v_0 negativ ist, ein Minimum, wenn v_0 positiv ist; absolut genommen erreicht v in diesem Augenblicke stets einen Minimalwerth.

Die allgemeine Bahngleichung (A.) wollen wir jetzt dadurch umformen, daß wir $r = r_1 + r'$ setzen, wo $r_1 = -\frac{g \cos\vartheta}{\omega^2 \sin^2\vartheta}$.

Es ist dann

$$r' = r - r_1 = C_1 e^{(\varphi - \varphi_0)\sin\vartheta} + C_2 e^{-(\varphi - \varphi_0)\sin\vartheta}.$$

Wir setzen ferner $\varphi = \varphi_1 + \varphi'$. Es ist dann

$$r' = C_1 e^{(\varphi_1 - \varphi_0)\sin\vartheta} \cdot e^{\varphi'\sin\vartheta} + C_2 e^{-(\varphi_1 - \varphi_0)\sin\vartheta} \cdot e^{-\varphi'\sin\vartheta}.$$

Und wir bestimmen jetzt φ_1 so, daß $\varphi = \varphi_1$ wird, wenn $r = r_1$ wird, d. h. in dem Augenblicke, wo der materielle Punkt die Gleichgewichtslage passirt, was unter den Voraussetzungen dieses §. ja möglich ist. Setzen wir jetzt $r' = 0$ und $\varphi' = 0$, so erhalten wir,

da $C_1 = \dfrac{g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta + v_0\,\omega\sin\vartheta}{2\omega^2\sin^2\vartheta}$ und

$C_2 = \dfrac{g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta - v_0\,\omega\sin\vartheta}{2\,\omega^2\sin^2\vartheta}$ ist, aus obiger Gleichung:

$$e^{2(\varphi_1 - \varphi_0)\sin\vartheta} = \frac{v_0\,\omega\sin\vartheta - (g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta)}{g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta + v_0\,\omega\sin\vartheta}.$$

Diese Gleichung liefert unter den Voraussetzungen unseres §. einen reellen Werth für $e^{(\varphi_1 - \varphi_0)\sin\vartheta}$, nämlich

$$\frac{\pm\sqrt{(v_0\,\omega\sin\vartheta)^2 - (g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta)^2}}{g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta + v_0\,\omega\sin\vartheta}.$$

Die Wurzel hat das obere oder untere Zeichen, jenachdem der Nenner $g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta + v_0\,\omega\sin\vartheta$ positiv oder negativ ist. Substituiren wir diesen Werth von $\varphi_1 - \varphi_0$ in obige Gleichung für r', so erhalten wir

$$r' = \frac{\sqrt{(v_0\omega\sin\vartheta)^2 - (g\cos\vartheta + r_0\omega^2\sin^2\vartheta)^2}}{2\,\omega^2\sin^2\vartheta}\left\{e^{\varphi'\sin\vartheta} - e^{-\varphi'\sin\vartheta}\right\}. \quad \text{(XVI.)}$$

NB. Man beachte, daß die Wurzel das Vorzeichen von r' hat, d. h. das Vorzeichen von $g\cos\vartheta + r_0\,\omega^2\sin^2\vartheta + v_0\,\omega\sin\vartheta$.

Verwandlen wir in dieser Gleichung (XVI.) φ' in $-\varphi'$, so nimmt r' den absolut genommen gleichen aber entgegengesetzten Werth an. In demselben Verhältnisse also, in welchem r' absolut genommen abnimmt, wenn der materielle Punkt sich der Gleichgewichtslage nähert, wächst es auch wieder, wenn der Punkt die Gleichgewichtslage passirt hat und sich nun wieder von derselben entfernt. Ebenso nimmt auch die Geschwindigkeit bei Annäherung des materiellen Punktes an die Gleichgewichtslage in demselben Verhältnisse ab, wie sie nach dem Durchgange durch die Gleichgewichtslage wieder wächst. Natürlich gilt das Gesagte nur von den absoluten Werthen der Geschwindigkeit; denn ein Zeichenwechsel findet bei dem Durchgange durch die Gleichgewichtslage nicht statt.

Projiciren wir die Bahncurve auf die Aequatorialebene, so erhalten wir die ebene Curve

$$\varrho' = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}\vartheta + \varrho_0\right)^2}\left\{e^{\varphi'\sin\vartheta} - e^{-\varphi'\sin\vartheta}\right\} \quad (\text{XVI}^a.)$$

Die Betrachtung dieser Gleichung zeigt, daß der Punkt $\varrho' = \varrho - \varrho_1 = 0$ und $\varphi' = 0$, d. h. der Punkt, in welchem die Curve (XVI^a.) den Gleichgewichtskreis $\varrho_1 = -\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}\vartheta$ durchsetzt, ein Scheitel der Curve ist. Von diesem Punkte $\varrho' = 0$, $\varphi' = 0$ hat die Curve symmetrische Aeste, die sich beide in's Unendliche erstrecken. Der eine negative Zweig umwindet unendlich oft den auf der negativen Seite der Aequatorialebene liegenden Gleichgewichtskreis und entfernt sich so schließlich in's Unendliche; der andere, positive Zweig, geht durch den Nullpunkt, durchsetzt dann die Aequatorialebene und entfernt sich dann auf der positiven Seite dieser Ebene in's Unendliche.

Ist die Richtung der Anfangsbewegung von der Gleichgewichtslage abgekehrt, so durchläuft die Projection des materiellen Punktes von $\varrho_0\ \varphi_0$ aus natürlich den Ast der Curve (XVI^a.), welcher den Scheitel nicht enthält.

Ueber die Curve (XVI[a].) bleibt noch zu bemerken, daß sie nicht wie (XIV[a].) (vergl. §. 10, S. 29) im Scheitel auf dem Radiusvector senkrecht steht. Für sehr großes ϱ nähert sich aber auch sie einer logarithmischen Spirale; für wachsendes ϱ und φ nähert sich nämlich tg μ dem constanten Werthe $\frac{1}{\sin\vartheta}$.

III. Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen über die räumliche Bahncurve und die Geschwindigkeit, mit der sie durchlaufen wird.

§. 12.

Krümmungsverhältnisse.

Die einzelnen Fälle des Problems sind jetzt erschöpft. Es erübrigen noch einige allgemeine Bemerkungen über die räumliche Bahncurve.

Der Cylinder, welcher zur Axe die senkrechte Polaraxe und zur Leitlinie die ebene Spirale:

$$\varrho = -\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}+\vartheta\,\frac{1}{2}\left(\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}\vartheta+\varrho_0+\frac{v_0}{\omega}\right)e^{(\varphi-\varphi_0)\sin\vartheta}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{g}{\omega^2}\operatorname{cotg}\vartheta+\varrho_0-\frac{v_0}{\omega}\right)e^{-(\varphi-\varphi_0)\sin\vartheta}$$ hat, schneidet aus dem geraden Kreiskegel $\vartheta = \text{const.}$ eine Curve doppelter Krümmung heraus, welche gerade die Bahncurve des materiellen Punktes ist.

Um nun über die Krümmung dieser Curve eine Vorstellung zu erlangen, wollen wir jetzt Formeln ableiten für die Funktionen des Winkels ψ, welchen die positive Richtung des Radiusvector in jedem Punkte der Curve mit der Tangente bildet, welche in der Richtung der Bewegung gezogen ist.

Um zu einem analytischen Ausdrucke für cos ψ zu gelangen, gehen wir vorläufig von den bisher gebrauchten Polarcoordinaten

über zu gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten. Als Z-axe nehmen wir die senkrechte Polaraxe und zwar als positive Richtung derselben die positive Richtung der Polaraxe; als positive X-axe die halbunendliche Gerade, in welcher die Aequatorialebene von der Ebene des ersten Meridians $\varphi = 0$ geschnitten wird; und als positive Y-axe die Schnittlinie der Aequatorialebene und der Ebene des 90. Meridians $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Von den Coordinaten r, φ, ϑ zu den x, y, z erhalten wir dann folgende Uebergangsformeln:

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi,$$
$$z = r \cos\varphi.$$

Da der Fortschritt von einem beliebigen Punkte der Raumcurve zu einem Nachbarpunkte nur auf dem Kegel $\vartheta = \text{const.}$ erfolgen kann, da also auch $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ constant sind, so ist

$$dx = \sin\vartheta\,(\cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi)$$
$$dy = \sin\vartheta\,(\sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi) \text{ und}$$
$$dz = \cos\vartheta\,dr.$$

Das Linienelement der auf den Kegel $\vartheta = \text{const.}$ tracirten Bahncurve sei ds. Wir nehmen dasselbe immer absolut. Es ist dann $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, also in Polarcoordinaten nach unseren obigen Formeln $ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2\vartheta\,d\varphi$.

Wenn wir nun die Winkel, welche die positive Richtung des Radiusvector für einen beliebigen Curvenpunkt mit den Axen der x, y, z bildet, bezüglich mit α, β, γ bezeichnen, so ist offenbar

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \sin\vartheta\cos\varphi$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} = \sin\vartheta\sin\varphi$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r} = \cos\vartheta$$

Die Winkel, welche die Tangente in demselben Curvenpunkte mit den Axen bildet, seien λ, μ, ν.

Es ist dann

$$\cos\lambda = \frac{dx}{ds} = \frac{\sin\vartheta\,(\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi)}{\sqrt{dr^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2}}.$$

$$\cos\mu = \frac{dy}{ds} = \frac{\sin\vartheta\,(\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi)}{\sqrt{dr^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2}}$$

$$\cos\nu = \frac{dz}{ds} = \frac{\cos\vartheta\, dr}{\sqrt{dr^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2}}$$

Nach einer sehr bekannten Formel ist aber $\cos\psi = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu$. Substituiren wir für $\cos\alpha$ u. s. w. die Werthe in Polarcoordinaten, so erhalten wir

$$\cos\psi = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2}} = \frac{\frac{dr}{d\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\sin^2\vartheta}}.$$

Aus dieser Formel für $\cos\psi$ ergiebt sich sofort

$$\sin\psi = \frac{r\sin\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\sin^2\vartheta}} = \frac{\varrho}{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\sin^2\vartheta}}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r\sin\vartheta}{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)} = \frac{\varrho}{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)}.$$

Da nach unserer frühern Bestimmung φ immer wächst, also $d\varphi$ stets positiv ist, so hat $\cos\psi$ dasselbe Vorzeichen als dr; $\sin\psi$ hat das Vorzeichen von r. Bei dem Durchgange des materiellen Punktes durch das Bewegungscentrum, den Pol, wird $r = 0$, während $\frac{dr}{d\varphi} \gtrless 0$. In diesem Augenblicke wird also $\operatorname{tg}\psi = 0$. Dagegen wird $\operatorname{tg}\psi = \infty$, wenn $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ wird, während r nicht Null ist. Es ist aber $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{\omega}\frac{dr}{dt}$; es wird also $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ nur in dem Augenblicke, wo die Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$, mit welcher sich der materielle Punkt auf der rotirenden

Geraden bewegt, verschwindet. Verfolgen wir jetzt beispielshalber die Veränderung des Winkels ψ für den Fall, daß der materielle Punkt sich anfangs auf dem positiven Aste der rotirenden Geraden befindet und sich dem Pole zu nähern sucht. Es ist dann r positiv, dr negativ, mithin $\operatorname{tg}\psi < 0$, also $\angle\,\psi$ im zweiten Quadranten.

Wird nun $\frac{dr}{dt} = 0$, ehe der Punkt den Pol erreicht, so wird für den Punkt, wo $\frac{dr}{dt} = 0$ wird, $\operatorname{tg}\psi = \infty$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, und wenn nun der materielle Punkt seine Bewegungsrichtung umkehrt, geht $\angle\,\psi$ in den ersten Quadranten über. Ist aber v_0 groß genug, um den materiellen Punkt den constant auf ihn wirkenden Kräften entgegen über das Bewegungscentrum hinaus zu treiben, so wird im Pole $\operatorname{tg}\psi = 0$, $\psi = \pi$. Bei der weiteren Bewegung des Punktes über den Pol hinaus wird $\operatorname{tg}\psi$ positiv, $\angle\,\psi$ geht in den dritten Quadranten über.

Je weiter sich der materielle Punkt auf dem positiven oder negativen Arme der rotirenden Geraden schließlich vom Pole entfernt, desto mehr nähert sich $\angle\,\psi$ einer bestimmten Grenze. Für unbegrenzt wachsendes φ nämlich nähert sich $\operatorname{tg}\psi = \frac{r \sin\vartheta}{\frac{dr}{d\varphi}}$ dem Werthe $+ 1$. Es ist also für den positiven Arm der rotirenden Geraden für $\varphi = \infty$, $\operatorname{Lim}\psi = \frac{\pi}{4}$, für den negativen Ast $\operatorname{Lim}\psi = \frac{5\,\pi}{4}$.

§. 13.

An diese Erörterungen über die Krümmungsverhältnisse der Bahn resp. über den Richtungsunterschied der Tangente und des Radiusvector in einem beliebigen Punkte der Bahncurve schließt sich naturgemäß noch eine Betrachtung über die Geschwindigkeit c, mit welcher der materielle Punkt seine Bahn durchläuft. Die Geschwindigkeit, mit welcher derselbe

sich auf der rotirenden Geraden bewegt, ist $\frac{dr}{dt} = v$. Die Gerade dreht sich aber selbst mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω. Ein materieller Punkt, der sich auf derselben in der Entfernung r vom Drehpunkte befindet, hat also auch noch die Geschwindigkeit $\omega r \sin \vartheta = \omega \varrho$ in der Richtung der Tangente des Kreises, der durch den betrachteten Punkt geht, und dessen Centrum auf der Polaraxe liegt und dessen Ebene auf dieser Polaraxe senkrecht steht. Diese Tangente steht in der durch den betrachteten Curvenpunkt an den Kegel $\vartheta = \text{const.}$ gelegten Tangentialebene senkrecht auf dem Radiusvector. Die wirkliche Geschwindigkeit c, mit welcher der materielle Punkt seine Bahncurve durchläuft, setzt sich aus den beiden auf einander senkrechten Bewegungen zusammen nach dem Princip der Superposition der Bewegungen. Es ist also $c^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \omega^2 \varrho^2$.

Es ist aber $\frac{dr}{dt} = \omega \frac{dr}{d\varphi}$. Folglich

$$c = \pm \omega \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \varrho^2} = \pm \omega \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta}\,.$$

Wenn wir nun berücksichtigen, daß

$$\sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta} = \frac{r \sin \vartheta}{\sin \psi} = \frac{\varrho}{\sin \psi}$$

ist, so erhalten wir zwischen der Geschwindigkeit c und dem Winkel ψ folgende Relation

$$\sin \psi = \frac{\omega \varrho}{c}.$$

Im Allgemeinen ist $c > \omega \varrho$; nur in dem Augenblicke, wo $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ wird, wird $\omega \varrho = c$, also $\angle \psi = \frac{\pi}{2}$. Also nur dann steht die Raumcurve auf dem Radiusvector senkrecht, wenn die Projection derselben auf die Aequatorialebene auch auf ihrem Radiusvector senkrecht steht.